

Ime i prezime: _____

1	2	3	4	5	Σ

ALGEBARSKE STRUKTURE

(nast. smjerovi)

1. kolokvij, 30. travnja 2021.

1. Za aditivnu grupu \mathbb{Z} i multiplikativnu grupu $\mathbb{Q}^\times = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ definiramo na Kartezijevom produktu $S = \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}^\times$ binarnu operaciju $*$ ovako:

$$(x, y) * (a, b) := (x + a + xa, 3yb).$$

Koja od sljedećih struktura je $(S, *)$: grupoid, polugrupa, monoid, grupa? Je li operacija množenja $*$ komutativna?

2. Za aditivnu grupu \mathbb{Z}^3 definiramo preslikavanje $f : \mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathbb{Z}^3$ s

$$f(x, y, z) := (2x - y - 3z, x + 4y, 4x + 7y - 3z).$$

Je li f endomorfizam grupe \mathbb{Z}^3 ? Ako da, izračunajte jezgru od f , i utvrdite je li f epimorfizam.

3. Navedite sve, do na izmorfizam međusobno različite, abelove grupe reda 250. Postoji li neka grupa G reda 250 koja ima podgrupu H tako da je kvocijentna grupa $G/H \cong \mathbb{Z}/50\mathbb{Z}$? Ako da, precizno odredite neku takvu G i pripadnu podgrupu H .
4. U aditivnoj grupi $G = \mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$ definiramo H kao podgrupu generiranu elementima $\bar{4} = 4 + 30\mathbb{Z}$ i $\bar{14} = 14 + 30\mathbb{Z}$.
- a) Jesu li grupe H i G/H cikličke? Ako da, odredite $m, n \in \mathbb{N}$ takve da je $H \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ i $G/H \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, te dokažite da tu doista imamo izomorfizme grupa.
- b) Je li preslikavanje $f : H \rightarrow G$, $f(x) = 26x$, homomorfizam grupa? Je li to monomorfizam?
5. Neka su M , N i K normalne podgrupe u grupi G . Definirajmo $H \subseteq G$ kao skup svih elemenata oblika mnk , za $m \in M$, $n \in N$ i $k \in K$. Je li H nužno podgrupa od G ? Je li H nužno normalna podgrupa od G ? Ako da, je li H/N nužno normalna podgrupa od G/N ?

Napomena. Dozvoljeno je korištenje samo pribora za pisanje i brisanje! Sve svoje tvrdnje detaljno obrazložite i/ili dokažite! (Odgovori kao npr. "da" ili "ne" nose nula bodova!) Rješenje svakog zadatka OBAVEZNO pišite na zasebnom papiru! Na svakom papiru na kojem pišete ČITKO napišite ime i prezime!