

Ime i prezime: \_\_\_\_\_

1	2	3	4	5	$\Sigma$

## ALGEBARSKE STRUKTURE

(nast. smjerovi)

1. kolokvij, 3. svibnja 2022.

1. Definirajmo  $P$  kao skup svih kompleksnih brojeva  $a + bi$ , gdje su  $a, b \in \mathbb{Q}$  i  $a \neq 0$ .  
I onda na skupu  $P$  definirajmo binarnu operaciju

$$(a + bi) * (x + yi) = ax + (ay + bx)i.$$

Koja je od sljedećih struktura  $(P, *)$ : grupoid, polugrupa, monoid, grupa?

2. Gledajmo skup svih realnih polinoma  $\mathbb{R}[X]$  kao aditivnu grupu, uz standardnu operaciju zbrajanja polinoma. Onda definirajmo preslikavanje

$$\Delta : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X], \quad \Delta(f(X)) := 2Xf'(X),$$

gdje je  $f'(X)$  standardna derivacija polinoma  $f(X)$ . Je li  $\Delta$  endomorfizam grupe  $\mathbb{R}[X]$ ? Ako da, utvrdite je li  $\Delta$  monomorfizam i je li  $\Delta$  epimorfizam.

3. Neka su definirani skupovi matrica

$$S := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ y & z & 1 \end{pmatrix} \in \text{GL}_3(\mathbb{R}) \right\}, \quad T := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \end{pmatrix} \in \text{GL}_3(\mathbb{R}) \right\}.$$

Jesu li  $S$  i  $T$ , uz standardnu operaciju množenja matrica, podgrupe od  $\text{GL}_3(\mathbb{R})$ ?  
Ako da, za svaku od tih dviju grupa utvrdite je li ona komutativna grupa, a zatim utvrdite je li  $T$  normalna podgrupa od  $S$ .

4. Neka je dana grupa  $G = \mathbb{Z}/54\mathbb{Z}$  i neka je  $H$  njezina podgrupa generirana elementom  $\overline{24} = 24 + 54\mathbb{Z}$ .
- a) Odredite red kvocijentne grupe  $G/H$ . Zatim odredite sve podgrupe od  $G$  koje sadrže  $H$ .
- b) Pokažite da postoji jedinstvena prava podgrupa  $M$  od  $G$  (tj.  $\{\overline{0}\} \neq M \neq G$ ) koja ima najveći mogući broj elemenata, i precizno ju odredite. Postoji li neki netrivialan epimorfizam  $\varepsilon : M \rightarrow G/H$ ?
5. Neka je  $G$  grupa, neka su  $H$  i  $K$  bilo koje njezine podgrupe i neka je  $\alpha : G \rightarrow G$  proizvoljan monomorfizam. Moraju li grupe  $H \cap K$  i  $\alpha(H) \cap \alpha(K)$  nužno biti izomorfne?

**Napomena.** Dozvoljeno je korištenje samo pribora za pisanje i brisanje! Sve svoje tvrdnje detaljno obrazložite i/ili dokažite! (Odgovori kao npr. "da" ili "ne" nose nula bodova!) Rješenje svakog zadatka **OBAVEZNO** pišite na zasebnom papiru! Na svakom papiru na kojem pišete **ČITKO** napišite ime i prezime!