

Ime i prezime: _____

1	2	3	4	5	Σ

ALGEBARSKE STRUKTURE

(nast. smjerovi)

1. kolokvij, 2. svibnja 2023.

1. Neka je $\mathbb{Q}_+ = \mathbb{Q} \cap (0, +\infty)$, skup svih pozitivnih racionalnih brojeva. Na skupu $S = \mathbb{Q}_+ \times \mathbb{Q}_+$ definirajmo operaciju množenja

$$(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1 x_2, x_1 y_2 + y_1 x_2 + y_1 y_2).$$

Koja je od sljedećih struktura $(S, *)$: grupoid, polugrupa, monoid, grupa? Je li operacija $*$ komutativna?

2. Definirajmo preslikavanje $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ s $\phi(x, y) = (3^x y, 1/y^2)$. (Ovdje je \mathbb{R}_+ standardna multiplikativna grupa pozitivnih realnih brojeva.) Je li ϕ homomorfizam grupa? Ako da, izračunajte mu jezgru i utvrdite je li to epimorfizam.

3. Neka je S skup svih 3×3 regularnih realnih matrica oblika $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$ i neka je

T skup svih 3×3 regularnih realnih matrica oblika $\begin{pmatrix} x & y & 0 \\ 0 & x^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Jesu li S i T

grupe s obzirom na standardnu operaciju množenja matrica? Ako da, je li T normalna podgrupa od S ?

4. Neka je grupa $G = \mathbb{Z}/102\mathbb{Z}$ i neka je H njezina podgrupa generirana elementima $\overline{12} = 12 + 102\mathbb{Z}$ i $\overline{42} = 42 + 102\mathbb{Z}$.

(a) Odredite koji su svi mogući redovi elemenata iz grupe H i za svaki takav red n nađite sve elemente $x \in H$ čiji je red upravo n .

(b) Postoji li neka podgrupa B grupe $A = \mathbb{Z}/180\mathbb{Z}$ takva da su kvocijentne grupe G/H i A/B međusobno izomorfne? Ako da, precizno odredite neku takvu podgrupu B .

5. (a) Jesu li grupe $\mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}^\times$ i \mathbb{C}^\times izomorfne?
(b) Jesu li grupe $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ i \mathbb{R}^\times izomorfne?

Napomena. Dozvoljeno je korištenje samo pribora za pisanje i brisanje! Sve svoje tvrdnje detaljno obrazložite i/ili dokažite! (Odgovori kao npr. "da" ili "ne" nose nula bodova!) Rješenje svakog zadatka OBAVEZNO pišite na zasebnom papiru! Na svakom papiru na kojem pišete ČITKO napišite ime i prezime!