Ime i prezime: ______________________

1	2	3	4	5	Σ

ALGEBARSKE STRUKTURE - A grupa

(nast. smjerovi)

2. kolokvij, 28.6.2019.

1 Neka su $m, n \in \mathbb{N}$ fiksirani prirodni brojevi. Definirajmo podskup $S \subseteq M_2(\mathbb{Z})$ kao skup svih matrica $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ takvih da je b djeljiv s m i c djeljiv s n. Je li S potprsten s jedinicom od $M_2(\mathbb{Z})$? Ako da, je li taj prsten komutativan? Je li S integralna domena?

2 Je li preslikavanje $A\colon \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}[x]$ zadano s

$$A(p(x)) = p(2x-1) \quad \text{za sve } p(x) \in \mathbb{Z}[x]$$

endomorfizam od $\mathbb{Z}[x]$? Vrijedi li da se jedinica preslika u jedinicu? Je li A automorfizam od $\mathbb{Z}[x]$?

3 Neka je

$$J = \{p(x) \in \mathbb{Z}[x] \,:\, p(1) \in 6\mathbb{Z}\}\,.$$

Je li J ideal u prstenu $\mathbb{Z}[x]$? Ako jest, ispitajte je li prost.

4 Neka je $w \in \mathbb{C}$ takav da je $w^2 + 10 = w$. Definirajmo skup

$$\Omega = \{a + bw \,:\, a, b \in \mathbb{R}\}\,.$$

Je li Ω potpolje od $\mathbb{C}$? Ako da, jesu li Ω i $\mathbb{R}$ međusobno izomorfna polja?

5 Neka je $n > 1$ prirodan broj, neka su $R_1, \ldots, R_n$ prsteni i neka je I_i ideal u R_i za svaki $i = 1, \ldots, n$. Definirajmo prsten $R = R_1 \times \cdots \times R_n$ i skup $I = I_1 \times \cdots \times I_n$.

(a) Dokažite da je I ideal u R. Mora li I biti glavni ideal ukoliko je I_i glavni ideal u R_i, za svaki $i = 1, \ldots, n$.

(b) Ako je I_i maksimalan ideal u R_i, za svaki $i = 1, \ldots, n$, mora li I biti maksimalan ideal u R?

1	2	3	4	5	Σ

Ime i prezime: ______________________

ALGEBARSKE STRUKTURE - B grupa

(nast. smjerovi)

2. kolokvij, 28.6.2019.

1 Neka su $a, b \in \mathbb{N}$ fiksirani prirodni brojevi. Definirajmo podskup $T \subseteq M_2(\mathbb{Z})$ kao skup svih matrica $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ takvih da je y djeljiv s a i z djeljiv s b. Je li T potprsten s jedinicom od $M_2(\mathbb{Z})$? Ako da, je li taj prsten komutativan? Je li T integralna domena?

2 Je li preslikavanje $B\colon \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}[x]$ zadano s

$$B(p(x)) = p(1 + 3x) \quad \text{za sve } p(x) \in \mathbb{Z}[x]$$

endomorfizam od $\mathbb{Z}[x]$? Vrijedi li da se jedinica preslika u jedinicu? Je li B automorfizam od $\mathbb{Z}[x]$?

3 Neka je

$$I = \{p(x) \in \mathbb{Z}[x] \,:\, p(-1) \in 10\mathbb{Z}\}\,.$$

Je li I ideal u prstenu $\mathbb{Z}[x]$? Ako jest, ispitajte je li prost.

4 Neka je $w \in \mathbb{C}$ takav da je $w^2 + 11 = 2w$. Definirajmo skup

$$\Omega = \{x + yw \,:\, x, y \in \mathbb{R}\}\,.$$

Je li Ω potpolje od $\mathbb{C}$? Ako da, jesu li Ω i $\mathbb{R}$ međusobno izomorfna polja?

5 Neka je $n > 1$ prirodan broj, neka su $S_1, \ldots, S_n$ prsteni i neka je J_i ideal u S_i za svaki $i = 1, \ldots, n$. Definirajmo prsten $S = S_1 \times \cdots \times S_n$ i skup $J = J_1 \times \cdots \times J_n$.

(a) Dokažite da je J ideal u S. Mora li J biti glavni ideal ukoliko je J_i glavni ideal u S_i, za svaki $i = 1, \ldots, n$.

(b) Ako je J_i maksimalan ideal u S_i, za svaki $i = 1, \ldots, n$, mora li J biti maksimalan ideal u S?