1	2	3	4	5	Σ

Ime i prezime: ____________________________

ALGEBARSKE STRUKTURE

(nast. smjerovi)

2. kolokvij, 28. lipnja 2022.

1. Za svaki $k \in \mathbb{R}$ definiramo R_k kao skup svih matrica oblika $\begin{pmatrix} a & 3a - k^2 b \\ 0 & b \end{pmatrix}$, gdje su $a, b \in \mathbb{Z}$. Odredite, ako takvi postoje, sve vrijednosti $k \in \mathbb{R}$ takve da je R_k potprsten s jedinicom od $M_2(\mathbb{Z})$. Postoji li neki k takav da je R_k štoviše integralna domena?

2. Definirajmo preslikavanje $F : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ s
$$F(p(X)) := \big(-3p(1) + 4\mathbb{Z}, p(0)\big).$$
Je li F homomorfizam prstena? Je li F homomorfizam prstena s jedinicom? Je li F epimorfizam? Je li F monomorfizam?

3. Neka je S skup svih polinoma $f(X) = a_0 + a_1 X + \cdots$ iz $\mathbb{Z}[X]$ kojima je slobodan član a_0 djeljiv s 23, a T skup svih polinoma $g(X) = b_0 + b_1 X + \cdots$ iz $\mathbb{Z}[X]$ kojima je koeficijent b_1 djeljiv s 22. Je li S ideal u $\mathbb{Z}[X]$? Je li T ideal u $\mathbb{Z}[X]$? Je li neki od ta dva skupa štoviše prost ideal u $\mathbb{Z}[X]$?

4. Odredite sve ideale u $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$. Svaki ideal napišite samo jednom. Odredite koji od tih ideala su prosti, te koji su maksimalni.

5. Neka je A domena glavnih ideala i neka je $p \in A$ prost element. Ako definiramo glavni ideal $I := (p)$, dokažite da je kvocijentni prsten A/I polje.

Napomena. Dozvoljeno je korištenje samo pribora za pisanje i brisanje! Sve svoje tvrdnje detaljno obrazložite i/ili dokažite! (Odgovori kao npr. "da" ili "ne" nose nula bodova!) Rješenje svakog zadatka OBAVEZNO pišite na zasebnom papiru! Na svakom papiru na kojem pišete ČITKO napišite ime i prezime!