1	2	3	4	5	Σ

Ime i prezime: ______________________________

ALGEBARSKE STRUKTURE

(nast. smjerovi)

2. kolokvij, 27. lipnja 2023.

1. Neka je $\mathcal{S}$ skup svih matrica $A \in M_2(\mathbb{Z})$ takvih da je $AX = XA$, gdje je matrica $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Je li $\mathcal{S}$ prsten s jedinicom uz standardne operacije zbrajanja i množenja matrica? Je li $\mathcal{S}$ komutativan prsten?

2. Definirajmo preslikavanje $f : \mathbb{Z}[X] \to M_2(\mathbb{Z})$ s $f(p(X)) := \begin{pmatrix} p(1) & p(1) - p(-1) \\ 0 & p(-1) \end{pmatrix}$. Je li f homomorfizam prstena? Je li f homomorfizam prstena s jedinicom? Ako da, izračunajte jezgru od f i posebno utvrdite je li f monomorfizam prstena.

3. Ako neki takvi postoje, odredite sve prirodne brojeve k za koje je skup
$$B_k := \{ka + 3b\sqrt{6} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$
ideal u prstenu $A = \mathbb{Z}[\sqrt{6}]$. Postoji li barem jedan takav k za koji je ideal B_k glavni?

4. Neka je I ideal u prstenu racionalnih polinoma $A = \mathbb{Q}[X]$ generiran polinomima $2X^3 + 2X$ i $X^3 + X^2 + X + 1$. Je li I glavni ideal? Je li I prost ideal? Je li kvocijentni prsten A/I polje?

5. Neka su R i S komutativni prsteni s jedinicama i neka je $\phi : R \to S$ neki epimorfizam.
   (a) Ako je Y prost ideal u prstenu S, mora li nužno praslika $X := \phi^{-1}(Y)$ biti prost ideal u R? Svoju tvrdnju treba dokazati.
   (b) Ako je R prsten glavnih ideala, mora li i S nužno biti prsten glavnih ideala? Svoju tvrdnju treba dokazati.

Napomena. Dozvoljeno je korištenje samo pribora za pisanje i brisanje! Sve svoje tvrdnje detaljno obrazložite i/ili dokažite! (Odgovori kao npr. "da" ili "ne" nose nula bodova!) Rješenje svakog zadatka OBAVEZNO pišite na zasebnom papiru! Na svakom papiru na kojem pišete ČITKO napišite ime i prezime!