Alg. strukture – prvi kratki test - rješenja i bodovanje
11. travnja 2025.

1. *Za svaki realan broj r definiramo matricu $M_r := \begin{pmatrix} 2r+1 & 2r \\ -2r & -2r+1 \end{pmatrix}$ i zatim definiramo skup $S := \{M_q \mid q \in \mathbb{Q}\}$. Je li S komutativna podgrupa od $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$?*

Rješenje.

• **(0.5 boda)** Za svaki $r \in \mathbb{R}$ je $\det M_r = 1$ i zato je $S \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

• **(0.5 boda)** Za $q, r \in \mathbb{Q}$ računamo

$$\begin{aligned} M_q M_r &= \begin{pmatrix} (2q+1)(2r+1)-(2q)(2r) & (2q+1)(2r)+(2q)(1-2r) \\ (-2q)(2r+1)-(1-2q)(2r) & (-2q)(2r)+(1-2q)(1-2r) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2(q+r)+1 & 2(q+r) \\ -2(q+r) & -2(q+r)+1 \end{pmatrix} = M_{q+r}, \end{aligned}$$

iz čega je jasno da je $M_q M_r \in S$.

• **(0.5 boda)** Primijetimo da je inverz

$$(M_q)^{-1} = \begin{pmatrix} -2q+1 & -2q \\ -(-2q) & 2q+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(-q)+1 & 2(-q) \\ -2(-q) & -2(-q)+1 \end{pmatrix} = M_{-q},$$

iz čega je jasno da $(M_q)^{-1} \in S$. Po definiciji podgrupe imamo da je $S \leq \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Iz gornjeg računa za množenje dviju matrica iz S je jasno kako vrijedi komutativnost u S; tj., S je komutativna grupa.

---

2. *Za kompleksan broj $\alpha = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ definiramo preslikavanje $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}^\times$ s $f(k) := \alpha^k$. Je li f homomorfizam grupa? Ako da, odredite jezgru i sliku od f. (*Uputa. *Računajte $f(1)$, $f(2)$, $\ldots$)*

Rješenje.

• **(0.5 boda)** Očito je $f(k+\ell) = \alpha^{k+\ell} = \alpha^k \alpha^\ell = f(k)f(\ell)$; tj., f je homomorfizam iz aditivne grupe $\mathbb{Z}$ u multiplikativnu grupu $\mathbb{C}^\times$.

• **(1 bod)** Računamo

$$f(2) = \alpha^2 = \frac{1-3+2i\sqrt{3}}{4} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \quad \text{i} \quad f(3) = \alpha^3 = \Big(\frac{i\sqrt{3}-1}{2}\Big)\Big(\frac{i\sqrt{3}+1}{2}\Big) = -1.$$

Sada je jasno kako imamo $f(4) = -\alpha$, $f(5) = -\alpha^2$ i $f(6) = 1$. Odavde zaključujemo da je slika

$$\mathrm{im} f = \{1, \alpha, \alpha^2, -1, -\alpha, -\alpha^2\}.$$

(Ako pogledamo broj α u kompleksnoj ravnini onda je jasno da je to šesti korijen jedinice; i to tzv. primitivan šesti korijen jedinice, što znači da on generira grupu μ_6.)

• **(0.5 boda)** Iz gornjeg računa vidimo kako je jezgra

$$\ker f = \{k \in \mathbb{Z} \mid f(k) = \alpha^k = 1\} = 6\mathbb{Z}.$$

---

3. *Neka je $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ i onda definiramo Ω kao skup svih matrica $A \in G$ takvih da je $\det A \in \{-1, 1\}$. Je li Ω podgrupa od G? Ako da, je li Ω štoviše normalna podgrupa od G?*

   Rješenje. • **(0.5 boda)** Imamo $\Omega = \{A \in G \mid |\det A| = 1\}$; i evidentno je $\Omega \subseteq G$. Sada ako su $A, B \in \Omega$, onda po B-C teoremu imamo da je

$$\left|\det(AB^{-1})\right| = \left|\frac{\det A}{\det B}\right| = \frac{|\det A|}{|\det B|} = \frac{1}{1} = 1;$$

   tj., $AB^{-1} \in \Omega$ i zato je $\Omega \leq G$.

   • **(1 bod)** Ako je $T \in G$ i $A \in \Omega$, onda ponovo po B-C teoremu imamo:

$$\det(TAT^{-1}) = \det T \ \det A \ \frac{1}{\det T} = \det A \quad \Longrightarrow \quad TAT^{-1} \in \Omega;$$

   pa zaključujemo da je $\Omega \trianglelefteq G$.

Napomena. Gore napisana rješenja zadataka pokazuju kako bi prilikom rješavanja zadataka u kolokvijima i testovima, trebalo argumentirati kako bi se rješenje smatralo korektnim. Što više preciznosti i detalja, to bolje!

Dodatne napomene (uz test).

• Dobar dio studenata u Zad. 1 ne provjerava je li $S \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

• Određeni broj studenata računa inverz 2×2 matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, namjesto da zapamti da je $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. To nije "zabranjeno", ali se tako prilikom pisanja testa/kolokvija gubi vrijeme!

• U Zad. 2 mnogi su napisali "$\alpha^k = 1 \quad \Rightarrow \quad k = 0$", što pokazuje kako ne znaju računati s kompleksnim brojevima. (U predmetu *Alg. strukture* ne traže se nikakva iole ozbiljnija znanja iz kompleksne analize, ali osnove o računanju s kompleksnim brojevima moraju se znati.) Nezanemariv broj studenata napisao je " još bolju" implikaciju: "$\alpha^k = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 0$", što između ostaloga pokazuje da ti studenti ne znaju što je neutralni element u multiplikativnoj grupi $\mathbb{C}^\times$.

U Zad. 2 neki iz $\alpha^k = 1$ "dobivaju" da je "$k = \log_\alpha 1 = 0$". (Ili treba znati kako se definira logaritam na $\mathbb{C}^\times$, ili ne treba pisati besmislice...)

• Određeni broj studenata je, naravno uz dodatne nekorektnosti i nepreciznosti, "zaključio" u Zad. 2 kako je "jezgra $\ker f$ prazan skup"??!! Treba zapamtiti: jezgra homomorfizma, bilo grupa bilo prstena, NIKADA NIJE PRAZAN SKUP!

• Određeni broj studenata u Zad. 3 nije znao korektno provjeriti je li uopće Ω sadržan u grupi G.

• Iako je to bilo naglašavano i na predavanjima i na vježbama, još uvijek postoje studenti koji pri provjeravanju je li neka podgrupa $X \leq G$ štoviše normalna idu gledati "da li za $x \in X$ i $g \in G$ imamo da je $gxg^{-1} = x$"!?

• Preveliki broj studenata općenito piše matematički nekorektno, što treba striktno izbjegavati. Primjerice u Zad. 3, uz oznake kao u formulaciji zadatka, mnogi pišu: "$\det G \in \Omega$" (Ne postoji "determinanta grupe", pa napisano nema smisla!) ili "$\det A \in \Omega$" ($\det A$ je broj, a Ω je matrična grupa, pa napisano nema smisla!) ili "$\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \in \{-1, 1\} \in \Omega$" (Što opet nije mat. korektno!) ili... Ukratko, treba pisati PRECIZNO, JASNO i MATEMATIČKI KOREKTNO.