

Ime i prezime: _____

1	2	3	4	5	Σ

ALGEBARSKJE STRUKTURE

(nast. smjerovi)

1. kolokvij, 26. travanj 2024.

1. Neka je $S = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{Q}\}$. Na skupu S definiramo binarnu operaciju množenja

$$(a, b) * (x, y) = (a + bx, by).$$

Koja je od sljedećih struktura $(S, *)$: grupoid, polugrupa, monoid, grupa? Je li operacija $*$ komutativna?

2. Definirajmo preslikavanje $h : \mathbb{Q} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ s $h(a, b) = (a + b, a - b)$. Je li h homomorfizam grupa? Ako jest, izračunajte jezgru od h i utvrdite je li to epimorfizam.

3. Neka je T grupa svih regularnih gornje trokutastih 2×2 realnih matrica.

Definiramo W kao skup svih dijagonalnih matrica $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$ takvih da je $x^2/y^2 \in \mathbb{Q}$. Je li W podgrupa od T ? Je li W normalna podgrupa od T ?

4. Neka je dana grupa $G = \mathbb{Z}/135\mathbb{Z}$ i neka je H njezina podgrupa generirana elementima $\overline{30} = 30 + 135\mathbb{Z}$ i $\overline{45} = 45 + 135\mathbb{Z}$.

- (a) Postoji li neki $k \in \mathbb{N}$ takav da su grupe G/H i $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ izomorfne? Ako da, odredite taj k i precizno objasnite zašto su promatrane grupe izomorfne. Ako ne, precizno dokažite zašto nisu izomorfne.
- (b) Ako neke takve postoje, odredite sve parove grupa (A, B) , gdje je A podgrupa od H i B je podgrupa od G/H takve da su A i B izomorfne grupe.

5. Neka je G grupa i pretpostavimo da je K neka njezina konačna podgrupa te da ne postoji neka druga podgrupa od G koja ima jednak broj elemenata kao i K . Mora li K nužno biti normalna podgrupa od G ?

Napomena. Dozvoljeno je korištenje samo pribora za pisanje i brisanje! Sve svoje tvrdnje detaljno obrazložite i/ili dokažite! (Odgovori kao npr. “da” ili “ne” nose nula bodova!) Rješenje svakog zadatka OBAVEZNO pišite na zasebnom papiru! Na svakom papiru na kojem pišete ČITKO napišite ime i prezime!