1	2	3	4	5	Σ

Ime i prezime: ____________________________

ALGEBARSKE STRUKTURE

(nast. smjerovi)

2. kolokvij, 21. lipanj 2024.

1. U prstenu cjelobrojnih polinoma $\mathbb{Z}[X]$ definiramo podskup
$$S := \{f \in \mathbb{Z}[X] \mid f(1) = f(2)\}.$$
Je li S potprsten od $\mathbb{Z}[X]$? Je li S potprsten s jedinicom od $\mathbb{Z}[X]$? Je li S ideal u $\mathbb{Z}[X]$?

2. Definirajmo preslikavanje $\phi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to M_2(\mathbb{Z})$ s $\phi(a, b) := \begin{pmatrix} 4b - 3a & 2a - 2b \\ 6b - 6a & 4a - 3b \end{pmatrix}$. Je li ϕ homomorfizam prstena s jedinicom? Ako da, utvrdite je li ϕ monomorfizam i je li epimorfizam.

3. Precizno definirajte pojam Euklidove domene te zatim precizno dokažite da je svaka Euklidova domena prsten glavnih ideala.

4. Odredite, ako neki takvi postoje, sve prirodne brojeve k takve da je skup
$$S_k := \{ka + 4b\sqrt{14} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$
ideal u prstenu $\mathbb{Z}[\sqrt{14}]$. Je li neki od tih ideala štoviše i maksimalan ideal u $\mathbb{Z}[\sqrt{14}]$?

5. Neka je A komutativan prsten s jedinicom, neka je P prost ideal u A i neka su $x_1, \ldots, x_k \in A$ elementi takvi da je zbroj ideala P i ideala generiranog skupom $S = \{x_1, \ldots, x_k\}$ jednak nekom maksimalnom idealu u A. Je li moguće da za neki element x_j pripadni element $x_j + P$ bude djelitelj nule u kvocijentnom prstenu A/P? Je li moguće da za neki x_j pripadni element $x_j + P$ bude invertibilan element u A/P?

Napomena. Dozvoljeno je korištenje samo pribora za pisanje i brisanje! Sve svoje tvrdnje detaljno obrazložite i/ili dokažite! (Odgovori kao npr. “da” ili “ne” nose nula bodova!) Rješenje svakog zadatka OBAVEZNO pišite na zasebnom papiru! Na svakom papiru na kojem pišete ČITKO napišite ime i prezime!