Alg. strukture – drugi kratki test - rješenja i bodovanje
06.06.2025.

1. *Neka je $n > 1$ prirodan broj. Definiramo S kao skup svih 2×2 cjelobrojnih matrica $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ takvih da je matrični koeficijent b djeljiv s n. Je li S potprsten u prstenu $M_2(\mathbb{Z})$? Je li S ideal u $M_2(\mathbb{Z})$?*

   Rješenje. Neka su matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ iz $M_2(\mathbb{Z})$.

   • **(0.5 boda)** Ako su $A, B \in S$, onda su posebno b i y djeljivi s n. Jer je $A - B = \begin{pmatrix} * & b-y \\ * & * \end{pmatrix}$ i očito je $b - y$ također djeljiv s n, zaključujemo da je $A - B \in S$.

   • **(1 bod)** Za $A, B \in S$ računamo $AB = \begin{pmatrix} * & ay+bw \\ * & * \end{pmatrix}$. I sada, kako su b i y djeljivi s n, zaključujemo da je i broj $ay + bw$ djeljiv s n; i zato je $AB \in S$. Slijedi da je $S \leq M_2(\mathbb{Z})$, potprsten.

   • **(1 bod)** Za A i B kao gore, gdje su $A \in S$ i $B \in M_2(\mathbb{Z})$ proizvoljni, produkt AB nije nužno u S. Naprimjer za $A = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ je $AB = B$, matrica koja nije iz S.

   Napomena. • Za pitanje "Je li S ideal u $M_2(\mathbb{Z})$?" dani argiument mora biti detaljan i korektan. Ako se za A i B kao u gornjem rješenju napiše naprimjer "očito $ay+bw$ nije (ili ne mora biti) djeljiv s n", to nije dovoljan argument za pozitivno bodovanje. (Posebna je stvar da je nezanemariv broj studenata koji 'argumentiraju' ovako: "Ako n ne dijeli a i n ne dijeli y, onda n ne dijeli niti ay". Jasno, to je besmislica!) Isto tako, nije bilo pitanje Jesu li svi S-ovi, za sve vrijednosti n, ideali?" I zato argumentacija u kojoj se kaže naprimjer "uzmimo npr. $n = 2$", i onda se za tako izabran n ide naći konkretne matrice $A \in S$ i $B \in M_2(\mathbb{Z})$ za koje $AB \notin S$, nije potpuno korektna. Za taj tip argumenta, ako je sve ostalo korektno napisano, dobije se 0.5 boda.

   • Nezanemariv broj studenata još nije naučio kako matematički korektno pisati relaciju djeljivosti. Naime, ako matematičkom notacijom želimo zapisati kako "n dijeli x", onda to pišemo kao $n|x$; a NE kao $x|n$. Onima koji su pri rješavanju zadatka "uporno pisali" tom krivom notacijom, i tako de facto pisali nekorektne argumente, uzeto je 0.5 boda. Savjet: Pišite matematički korektno! (Uostalom, obrazujete se za edukatore matematike i za to je fundamentalan preduvjet da govorite i pišete matematički korektno, precizno i detaljno.)

---

2. *Postoji li barem jedan cijeli broj a takav da je preslikavanje $\alpha : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Q}$, definirano s $\alpha(f(X)) := -af(3/5)$, homomorfizam prstena s jedinicom? Ako da, odredite sve takve vrijednosti a i zatim utvrdite je li pripadno preslikavanje α monomorfizam.*

   Rješenje.

   • **(0.5 boda)** Računamo za $f, g \in \mathbb{Z}[X]$:

   $$\alpha(f+g) = -a\big((f+g)(3/5)\big) = -a\big(f(3/5)+g(3/5)\big) = -af(3/5)+\big(-ag(3/5)\big) = \alpha(f)+\alpha(g);$$

   tj., za svaki $a \in \mathbb{Z}$ je α homomorfizam aditivnih grupa.

   • **(1 bod)** Sada za $f, g \in \mathbb{Z}[X]$ računamo

   $$\alpha(fg) = -a\big((fg)(3/5)\big) = -af(3/5)g(3/5)$$

i isto tako

$$\alpha(f)\alpha(g) = \big(-af(3/5)\big)\big(-ag(3/5)\big) = a^2 f(3/5)g(3/5).$$

Da bi α bio homomorfizam prstena s jedinicom posebno za jedinicu $f(X) = 1 = g(X)$ dobivamo da je nužno $a^2 = -a$, gdje je nužno $a \neq 0$. (Jer inače imamo $\alpha(1) = 0$.) Znači da je jedini traženi $a = -1$.

• **(1 bod)** Za jedini dobiveni homomorfizam $\alpha(f(X)) = f(3/5)$ znamo da bi to bio monomorfizam ako i samo ako je u jezgri $\ker f$ samo nul-polinom. Ali očito za npr. nenul-polinom $p(X) = 5X - 3$ imamo da je $\alpha(p(X)) = 0$; i zato α nije monomorfizam.

Napomena. • Ukoliko je prilikom pokušaja određivanja svih a-ova za koje je pripadno preslikavanje α homomorfizam prstena (s jedinicom) na "malo nekorektan" način, ili pak "pogađanjem", dobiveno da je jedino $a = -1$ dobar; dobije se 0.5 boda. Za "velike nekorektnosti" u argumentaciji, makar je navedeno da je $a = -1$ jedina dobra vrijednost dobije se 0 bodova.

• Veliki broj studenata je kod pitanja jesu li sva (tj. samo jedno, ukoliko je to prije korektno zaključeno!) preslikavanja α štoviše i monomorfizmi zaključilo kako je odgovor negativan "jer je naprimjer polinom $X - \dfrac{3}{5}$ u jezgri od α". Ali to je vrlo nekorektan aargument budući taj polinom NIJE u $\mathbb{Z}[X]$. I za tako napisano dobije se 0 bodova.
