AS – prvi kolokvij (24.04.2026.) - rješenja i bodovanje

1. *Na skupu* $S = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ *definiramo binarnu operaciju*

$$(a, b) * (x, y) := (ax, ay + bx^{-1}).$$

Koja je od sljedećih struktura $(S, *)$*: grupoid, polugrupa, monoid, grupa?*

Rješenje. • **(1 bod)** Za $a, b, x, y \in \mathbb{R}_+$ očito imamo $ax \in \mathbb{R}_+$ i $ay + b/x \in \mathbb{R}_+$. Slijedi: $(S, *)$ je grupoid.

• **(3 boda)** Za $(a, b), (x, y), (w, z) \in S$ računamo:

$$\big((a, b) * (x, y)\big) * (w, z) = (ax, ay + bx^{-1}) * (w, z) = \cdots = (axw, axz + ayw^{-1} + bx^{-1}w^{-1})$$

i isto tako

$$(a, b) * \big((x, y) * (w, z)\big) = (a, b) * (xw, xz + yw^{-1}) = \cdots = (axw, axz + ayw^{-1} + bx^{-1}w^{-1}).$$

Znači da asoc. vrijedi; tj., $(S, *)$ je polugrupa.

• **(4 boda)** Gledamo postoji li $(e, f) \in S$ takav da za svaki $(a, b) \in S$ bude

$$(a, b) * (e, f) = (ae, af + b/e) = (\textbf{??}) = (a, b).$$

Znači $ae = a$ i $af + b/e = b$, iz čega odmah dobivamo $e = 1$ i $f = 0$. Ali $0 \notin \mathbb{R}_+$ i zato par $(1, 0) \notin S$, pa S **nema** desni neutral.

Slijedi da $(S, *)$ jest polugrupa ali nije monoid.

---

2. *Neka je dana grupa* $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ *i onda za svaku matricu* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *iz* G *definirajmo matricu* $f(A) := \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$*. Je li s* $A \mapsto f(A)$ *definiran endomorfizam grupe* G*? Ako da utvrdite je li* f *monomorfizam i je li* f *epimorfizam.*

Rješenje. • **(3 boda)** Neka je matrica A kao u zadatku i $B = \begin{pmatrix} x & y \\ w & z \end{pmatrix} \in G$. Računamo

$$f(AB) = f\begin{pmatrix} ax + bw & ay + bz \\ cx + dw & cy + dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cy + dz & -(cx + dw) \\ -(ay + bz) & ax + bw \end{pmatrix}$$

i još

$$f(A)f(B) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z & -w \\ -y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dz + cy & -dw - cx \\ -bz - ay & bw + ax \end{pmatrix}.$$

Dakle, očito je $f(AB) = f(A)f(B)$; tj., f je endomorfizam od G.

• **(2 boda)** Ako (standardno) s $I \in G$ označimo jediničnu matricu, onda je jezgra

$$\ker f = \Big\{A \in G \mid f(A) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Big\} = \{I\};$$

tj., jezgra od f je trivijalna i zato je f monomorfizam.

• **(3 boda)** Neka je $B = \begin{pmatrix} x & y \\ w & z \end{pmatrix}$ proizvoljna matrica iz G. Onda je i matrica $A := \begin{pmatrix} z & -w \\ -y & x \end{pmatrix}$ također iz G (jer je $0 \neq \det B = xz - yw = \det A$). Nadalje, po definiciji preslikavanja f je $f(A) = \begin{pmatrix} x & -(-y) \\ -(-w) & z \end{pmatrix} = B$. To pokazuje da je f surjekcija; tj., f je epimorfizam.

---

3. *Neka su A, B, C i D grupe te neka su $f : A \to B$ i $g : C \to D$ epimorfizmi grupa. Definirajmo preslikavanje $\phi : A \oplus C \to B \oplus D$ s $\phi(a, c) := (f(a), g(c))$, za svaki $(a, c) \in A \oplus C$. Je li ϕ homomorfizam grupa? Je li ϕ nužno epimorfizam? Je li jezgra od ϕ nužno izomorfna direktnoj sumi jezgre od f i jezgre od g?*

Rješenje. • **(2 boda)** Ako su $(a_1, c_1), (a_2, c_2) \in A \oplus C$, onda računamo

$$\begin{aligned}\phi\big((a_1, c_1)(a_2, c_2)\big) &= (\text{def. množ. u } A \oplus C) = \phi(a_1a_2, c_1c_2) = \big(f(a_1a_2), g(c_1c_2)\big) \\ &= (\text{jer su } f, g \text{ homo.})\big(f(a_1)f(a_2), g(c_1)g(c_2)\big) = (\text{def. množ. u } B \oplus D) \\ &= \big(f(a_1), g(c_1)\big)\big(f(a_2), g(c_2)\big) = (\text{po def. } \phi) = \phi(a_1, c_1)\phi(a_2, c_2).\end{aligned}$$

Dakle, ϕ je homomorfizam grupa.

• **(2 boda)** Neka su $b \in B$ i $d \in D$ proizvoljni; tj., par $(b, d) \in B \oplus D$ je proizvoljan. Jer su f i g surjekcije, onda postoje neki $a \in A$ i $c \in C$ t.d. je $f(a) = b$ i $g(c) = d$. I onda je

$$\phi(a, c) = \big(f(a), g(c)\big) = (b, d);$$

i zato je ϕ također epimorfizam.

• **(4 boda)** Ako s e_B, e_D i $e_{B\oplus D}$ označimo neutrale u grupama B, D i $B \oplus D$, redom, onda su jezgre $\ker f = \{a \in A \mid f(a) = e_B\}$, $\ker g = \{c \in C \mid g(c) = e_D\}$ i

$$\ker \phi = \{(a, c) \in A \oplus C \mid \phi(a, c) = (f(a), g(c)) = e_{B\oplus D}\}.$$

Sada, jer je $\ker f$ podgrupa od A i $\ker g$ podgrupa od C, možemo shvatiti da je $\ker f \oplus \ker g$ podgrupa od $A \oplus C$. Ali kako je neutral u $B \oplus D$ jednaak (e_B, e_D), onda je uvjet $\phi(a, c) = e_{B\oplus D}$ ekvivalentan paru jednakosti $f(a) = e_B$ i $g(c) = e_D$, što je pak dalje ekvivalentno s $a \in \ker f$ i $c \in \ker g$. Tako vidimo da je zapravo

$$\ker \phi = \ker f \oplus \ker g.$$

---

4. (a) *Neka su $k, n \in \mathbb{N}$ i onda definirajmo grupu $M = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ i njezin element $w := k + n\mathbb{Z}$. Ako s d označimo najveći zajednički djelitelj brojeva n i k, dokažite da je red elementa w jednak n/d.*

   (b) *Definirajmo grupu $G = \mathbb{Z}/56\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/147\mathbb{Z}$. Neka je H_1 podgrupa od $\mathbb{Z}/56\mathbb{Z}$ generirana elementom $a := 10 + 56\mathbb{Z}$ i neka je H_2 podgrupa od $\mathbb{Z}/147\mathbb{Z}$ generirana elementom $b := 21 + 147\mathbb{Z}$. Nadalje neka je H podgrupa od G generirana elementom (a, b). Koliki je indeks podgrupe H u grupi $H_1 \times H_2$?*

Rješenje. (a) • **(4 bod.)** Označimo $k_1 = k/d$ i $n_1 = n/d$. Primijetimo da je

$$n_1 w = n_1 k + n\mathbb{Z} = n_1(dk_1) + n\mathbb{Z} = (n_1 d)k_1 + n\mathbb{Z} = nk_1 + n\mathbb{Z} = n\mathbb{Z}.$$

Slijedi da je red elementa $\ell = \mathrm{ord}(w)$ djelitelj od n_1.

Sada pretpostavimo da je $\ell < n_1$. Ali onda posebno (jer je ℓ red elementa w):

$$\ell w = \ell k + n\mathbb{Z} = n\mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad n|\ell k \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\ell k}{n} = \frac{\ell k_1}{n_1} \in \mathbb{N}.$$

Znači da n_1 dijeli ℓk_1. Ali jer su n_1 i k_1 relativno prosti, slijedi da nužno $n_1|\ell$; tj., $\ell = n_1 t$, za neki $t \in \mathbb{N}$. Ali onda je očito nemoguće da je $\ell < n_1$, pa je naša pretpostavka neodrživa. Zaključak: $\mathrm{ord}(w) = n_1$.

(b) • **(4 boda)** Po (a) dijelu zadatka znamo da je red grupe $H_1 = \langle a \rangle$ jednak

$$|H_1| = \frac{|\mathbb{Z}/56\mathbb{Z}|}{\mathrm{NZD}(10, 56)} = \frac{56}{2} = 28.$$

Analogno je red grupe $H_2 = \langle b \rangle$ jednak

$$|H_2| = \frac{|\mathbb{Z}/147\mathbb{Z}|}{\mathrm{NZD}(21, 147)} = \frac{147}{21} = 7.$$

Slijedi da je red grupe $|H_1 \times H_2| = 28 \cdot 7$.

S druge strane, jer $7|28$ jasno je da je red elementa $\mathrm{ord}(a, b) = 28$. I onda po Lagrangeovom teoremu imamo da je traženi indeks

$$(H_1 \times H_2 : H) = |(H_1 \times H_2)/H| = \frac{|H_1 \times H_2|}{|H|} = 7.$$

5. *Neka je G grupa i neka su M i N njezine dvije normalne podgrupe. Pokažite da je skup $S := \{mn \mid m \in M,\ n \in N\}$ podgrupa od G. Je li presjek podgrupe S i centra grupe G nužno normalna podgrupa od G?*

Rješenje. • **(4 boda)** Jasno, $S \subseteq G$. Nadalje neka su $m_1, m_2 \in M$ i $n_1, n_2 \in N$ te onda definirajmo $x := m_1 n_1$ i $y := m_2 n_2$, očito elemente iz S. Računamo

$$xy^{-1} = (m_1 n_1)(m_2 n_2)^{-1} = m_1 n_1 n_2^{-1} m_2^{-1} = \big(m_1 m_2^{-1}\big)\big(m_2 (n_1 n_2^{-1}) m_2^{-1}\big).$$

Jer je M podgrupa od G, onda je $m = m_1 m_2^{-1} \in M$. Jer je N podgrupa od G, onda je $n = n_1 n_2^{-1} \in N$. Jer je $N \trianglelefteq G$, onda je $m_2 n m_2^{-} \in N$. Slijedi da je $xy^{-1} \in S$ i onda po "kriteriju podgrupe" imamo da je $S \leq G$.

• **(4 bod.)** Centar grupe G je $\mathcal{Z}(G) := \{z \in G \mid zx = xz,\ \forall x \in G\}$. Znamo da je to podgrupa od G (i da je to čak normalna podgrupa od G). Nadalje, primijetimo da je **svaka** podgrupa $H \leq \mathcal{Z}(G)$ **normalna** u G. Naime, za bilo koje $g \in G$ i $h \in H$ imamo da je

$$ghg^{-1} = (\text{jer je } h \in \mathcal{Z}(G)) = (gh)g^{-1} = (hg)g^{-1} = h(gg^{-1}) = he_G = h \in H.$$

Po definiciji normalne podgrupe je $H \trianglelefteq G$.

Sada, kako su i S i $\mathcal{Z}(G)$ podgrupe od G, po tvrdnji s predavanja znamo da je onda i $H := S \cap \mathcal{Z}(G)$ podgupa od G; i ona je očito sadržana u $\mathcal{Z}(G)$. Po gore primijećenoj činjenici slijedi: $H \trianglelefteq G$.

Drugi način.

• **(4 boda)** Kao u prvom načinu se vidi da je $S \leq G$.

• **(2 boda)** Primijetimo da je $S \trianglelefteq G$. Naime za proizvoljne $mn \in MN = S$ i $g \in G$ imamo da je

$$g(mn)g^{-1} = (gmg^{-1})(gng^{-1}) \in MN = S.$$

• **(2 boda)** Lako se vidi da je centar $\mathcal{Z}(G)$ normalna podgrupa od G. Nadalje, na predavanjima je dokazano ako u grupi G imamo bilo koju kolekciju normalnih podgrupa $N_\lambda \trianglelefteq G$, za $\lambda \in \Lambda$, onda je i presjek $\bigcap_\Lambda N_\lambda \trianglelefteq G$. Posebno, jer su $\mathcal{Z}(G)$ i S normalne podgrupe od G, onda je i $\mathcal{Z}(G) \cap S \trianglelefteq G$.