Alg. strukture (nast. smjerovi) – prvi kratki test - rješenja i bodovanje
10. travnja 2026.

1. *Neka je S skup svih 2×2 matrica oblika $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$, gdje su $a \in \mathbb{R}$ i $b \in \mathbb{Q}_+$. (Ovdje je $\mathbb{Q}_+$ skup, tj. multiplikativna grupa, svih pozitivnih racionalnih brojeva.) Je li S grupa s obzirom na standardnu operaciju množenja matrica?*

   Rješenje.

   • **(0.5 boda)** Za proizvoljnu $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$ je $\det A = b > 0$ i zato je $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$; tj., imamo $S \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Koristeći definiciju podgrupe pokazat ćemo: $S \leq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

   • **(0.5 boda)** Za A kao gore imamo da je inverz $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a/b \\ 0 & 1/b \end{pmatrix}$, gdje su $-a/b \in \mathbb{R}$ i $1/b \in \mathbb{Q}_+$. Slijedi: $A^{-1} \in S$.

   • **(0.5 boda)** Za A kao gore i $B = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$, gdje su $x \in \mathbb{R}$ i $y \in \mathbb{Q}_+$, imamo $AB = \begin{pmatrix} 1 & x + ay \\ 0 & by \end{pmatrix}$, pri čemu su $x + ay \in \mathbb{R}$ i $by \in \mathbb{Q}_+$. Slijedi: $AB \in S$. I tako zaključujemo da je doista $S \leq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

---

2. *Definirajmo preslikavanje $f : \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{R}_+$ s $f(x) := \det \begin{pmatrix} \sqrt{x} & 1 \\ 0 & x^3 \end{pmatrix}$. Je li f homomorfizam grupa? Ako da, utvrdite je li f monomorfizam i je li epimorfizam.*

   Rješenje.

   • **(0.5 boda)** Prvo primijetimo da su $\mathbb{Q}_+$ i $\mathbb{R}_+$ multiplikativne grupe. Onda za $x, y \in \mathbb{Q}_+$ imamo $f(x) = x^3\sqrt{x}$ i analogno $f(y) = y^3\sqrt{y}$. Nadalje je

$$f(xy) = (xy)^3\sqrt{xy} = (x^3\sqrt{x})(y^3\sqrt{y}) = f(x)f(y);$$

   i zato je f homomorfizam grupa.

   • **(0.5 boda)** Tvrdimo da je f mono., što je ekvivalentno jednakosti $\ker f = \{1\}$ (jer smo vidjeli da je f homo.). Ali $x \in \ker f$ ako i samo ako je $x^3\sqrt{x} = 1$. Ali očito jedini $x \in \mathbb{Q}_+$ takav da je

$$x^3\sqrt{x} = 1 \iff (x^3\sqrt{x})^2 = x^6\, x = x^7 = 1$$

   je $x = 1$; tj., imamo $\ker f = \{1\}$ i zato i da je f mono.

   • **(0.5 boda)**

   Tvrdimo da f nije epimorfizam. Jedan način za to vidjeti je korištenjem dobro poznate činjenice da je $\sqrt{2}$ iracionalan broj. Naime, tvrdimo da ne postoji $x \in \mathbb{Q}_+$ takav da je $f(x) = x^3\sqrt{x} = \sqrt[4]{2}$. Jer u suprotnom bismo kvadriranjem zadnje jednakosti dobili da je $x^7 = \sqrt{2}$, što je nemoguće jer je očito $x^7 \in \mathbb{Q}_+$.

   Napomena. Da smo na isti način definirali $f : \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{Q}_+$ opet ne bismo imali epimorfizam. Recimo, ne postoji $x \in \mathbb{Q}_+$ t.d. je $f(x) = x^{7/2} = 2$. (Zašto?!)

---

3. *Neka je G grupa svih 2×2 realnih regularnih matrica oblika $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1/x \end{pmatrix}$ i neka je W podskup od G koji se sastoji od svih matrica oblika $\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, gdje je $z \in \mathbb{Q}$. (Ne treba dokazivati da je G grupa, s obzirom na standardnu operaciju množenja matrica.) Je li W normalna podgrupa od G?*

Rješenje. • **(0.5 boda)** Ako je $A = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in W$, gdje je $z \in \mathbb{Q}$, onda je $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ također iz W. Nadalje za A te $B = \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in W$ je $AB = \begin{pmatrix} 1 & u+z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, pri čemu je $u + z \in \mathbb{Q}$, i zato $AB \in W$. Zaključak: $W \leq G$, podgrupa.

• **(1.5 bod)** (normalnost) Neka je A kao gore i $T = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1/x \end{pmatrix} \in G$. Računamo

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1/x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/x & -y \\ 0 & x \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} 1 & zx^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ali npr. za $x = \sqrt[4]{2}$ (v. rješenje Zad. 2) i $z = 1$ je $zx^2 = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Zaključak. W **nije** normalna podgrupa od G.

Napomena. Gore napisana rješenja zadataka pokazuju kako bi prilikom rješavanja zadataka u kolokvijima i testovima, trebalo argumentirati kako bi se rješenje smatralo korektnim. Određeni, i nezanemariv, broj studenata pri argumentiranju 'samo nabacuje matematički tekst' bez popratnih komentara, iz čega ponekad nije jasno što se točno misli i želi pokazati. Što više preciznosti i detalja, to bolje!

Dodatne napomene (uz test).

• U Zad. 1 za inverz $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a/b \\ 0 & 1/b \end{pmatrix}$ treba komentirati kako je $-a/b \in \mathbb{R}$ i $1/b \in \mathbb{Q}_+$. Nadalje, ako se pokazivalo da je S grupa preko same definicije grupe (vrijede redom ztvorenost, asocijativnost, postoji neutral, postoji inverz), onda jer definirana operacija nije komutativna treba **obvezno** pokazivati da je neki element i lijevi i desni neutral te da za svaki element iz S postoji i lijevi i desni inverz te da su oni jednaki.

• U Zad. 2 neki su studenti pri pokazivanju da je f homomorfizam grupa pisali ovako:

$$f(xy) = \det \begin{pmatrix} \sqrt{xy} & 1 \\ 0 & (xy)^3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \sqrt{x} & 1 \\ 0 & x^3 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} \sqrt{y} & 1 \\ 0 & y^3 \end{pmatrix} = f(x)\, f(y),$$

pri čemu su pak neki od tih studenata uz drugi slijeva znak jednakosti napisali 'B-C'; i onda iz toga 'zaključili' da je f homomorfizam. No to kako jest napisano nije korektno. Naime, ako bismo stavili $A = \begin{pmatrix} \sqrt{x} & 1 \\ 0 & x^3 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} \sqrt{y} & 1 \\ 0 & y^3 \end{pmatrix}$, onda po Binet-Cauchy teoremu imamo

$$f(x)f(y) = \det A \, \det B = \det(AB) = \det \begin{pmatrix} \sqrt{x}\sqrt{y} & \sqrt{x} + y^3 \\ 0 & x^3y^3 \end{pmatrix}.$$

Jasno, dobije se da je determinanta napisana na kraju jednaka $f(xy)$; ali striktno govoreći tu se de facto, i opet, primjenjuje pravilo za determinante koje govori da je determinanta gornje/donje trokutaste $n \times n$ matrice jednaka produktu matričnih koeficijenata na glavnoj dijagonali. A sam B-C teorem nije dovoljan.

• Vezano uz pitanje je li f u Zad. 2 epimorfizam, bilo bi poželjno da netko tko se školuje kako bi danas-sutra poučavao druge osobe matematici barem informativno zna neke stvari. Recimo, više su puta tijekom predavanja spominjani pojmovi prebrojivosti/neprebrojivosti i činjenice kako je npr. $\mathbb{Q}$ prebrojiv skup dok je $\mathbb{R}$ neprebrojiv. Ako bi student znao 'osnove osnova' o tomu, odmah bi barem znao kako NIKAKO ne postoji bijekcija iz $\mathbb{Q}_+$ na $\mathbb{R}_+$; pa f ne može biti surjekcija (ali jest injekcija). Druga je stvar kako napisati neki argument koji je u kontekstu predmeta Alg. strukture prihvatljiv. (Osnove o pojmovima (ne)prebrojivosti u današnje vrijeme Interneta može svatko vrlo lako pronaći.)

Druga je vrsta onoga što se može nazvati 'općom matematičkom kulturom' osnovno znanje o iracionalnim i posebno tzv. transcendentnim brojevima. Danas-sutra nas kao matematičare s diplomom 'netko na cesti' može pitati recimo ovo: "Čuo sam da je broj π ($\pi = 3.14159\ldots$) transcendentan. Što to znači?" Vrlo je vjerojatno da mnogi od onih koji završe studij matematike na PMF-u, pa čak postanu i njegovi zaposlenici, neće nikad u životu vidjeti detaljan dokaz spomenute činjenice da je π transcendentan broj. No kako je rečeno, svatko od nas trebao bi znati objasniti pojam transcendentnosti i to da je π takav broj. To sve govorimo jer ako se to zna, onda je sasvim jasno da se primjerice baš π ne može nalaziti u slici od f u Zad 2; i posebno f ne može biti surjekcija. (I opet putem Interneta lako se može doznati više detalja...)

• U Zad. 3 značajan broj studenata je u potpunosti 'ignorirao' pitanje je li W uopće podgrupa od G; i za to izgubio 0.5 boda. Nadalje, jako veliki broj studenata je provjerom uvjeta normalnosti (je li TAT^{-1} u W za sve $T \in G$ i $A \in W$) dobio računom matricu koja je dana u gornjem rješenju zadatka (za što je dano 0.5 bodova), ali onda površno i KRIVO zaključio da je $zx^2 \in \mathbb{Q}$, za bilo koje $z \in \mathbb{Q}$ i $x \in \mathbb{R}$. Ovo je dobro mjesto za ukazati na banalne i krive zaključke koje treba ubuduće izbjegavati, jer na kolokvijima i pismenim ispitima neće biti 'bodova za ništa vrijedna'...

I za kraj; uvijek treba pisati PRECIZNO, JASNO, DETALJNO i MATEMATIČKI KOREKTNO.