AS – drugi kolokvij (19.06.2026.) - rješenja i bodovanje

1. *Neka je W skup svih 3×3 cjelobrojnih matrica $A = (a_{ij})$ takvih da su matrični koeficijenti $a_{21} = a_{31} = 0$ a matrični koeficijent a_{32} je djeljiv s 5. Je li W prsten s obzirom na standardne operacije zbrajanja i množenja matrica? Je li S prsten s jedinicom?*

   Rješenje. • **(1 bod)** Evidentno je $W \subseteq M_3(\mathbb{Z})$. Pomoću 'kriterija potprstena' dokazat ćemo da je $W \leq M_3(\mathbb{Z})$, potprsten.

   • **(2 boda)** Sada, neka su $A = (a_{ij}) \in W$ i $B = (b_{ij}) \in W$. Ako stavimo $C := A - B = (c_{ij})$, onda su posebno matrični koeficijenti $c_{21} = a_{21} - b_{21} = 0 - 0 = 0$ i analogno $c_{31} = 0$. Nadalje, jer je $c_{32} = a_{32} - b_{32}$, a 5 dijeli i a_{32} i b_{32}, onda 5 dijeli c_{32}.

   • **(4 boda)** Dalje, za gore uzete A i B lako računamo da za $D := AB = (d_{ij})$ imamo posebno $d_{21} = d_{31} = 0$. Nadalje je

$$d_{32} = 0 \cdot b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} = a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32},$$

   i to je broj djeljiv s 5 jer su a_{32} i b_{32} oba djeljivi s 5.

   • **(1 bod)** Konačno primijetimo da je jedinična 3×3 matrica I_3 očito u W; pa je W potprsten s jedinicom od $M_3(\mathbb{Z})$.

---

2. *Neka je R prsten 2×2 cjelobrojnih matrica $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ takvih da je a_{12} djeljiv s 6 a a_{21} djeljiv s 12. Definirajmo preslikavanje*

$$h : R \to M_2(\mathbb{Z}), \qquad h\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} d & -2c/3 \\ -3b/2 & a \end{pmatrix}.$$

   Je li h homomorfizam prstena s jedinicom? Ako da, utvrdite je li h monomorfizam i je li epimorfizam.

   Rješenje. • **(3 boda)** Za matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} x & y \\ w & z \end{pmatrix}$ iz R računamo

$$h(AB) = h\begin{pmatrix} ax + bw & ay + bz \\ cx + dw & cy + dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cy + dz & -2(cx + dw)/3 \\ -3(ay + bz)/2 & ax + bw \end{pmatrix}$$

   i isto tako

$$h(A)h(B) = \begin{pmatrix} d & -2c/3 \\ -3b/2 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & -2w/3 \\ -3y/2 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dz + cy & -2dw/3 - 2cx/3 \\ -3bz/2 - 3ay/2 & bw + ax \end{pmatrix}.$$

   Slijedi da je $h(AB) = h(A)h(B)$. Sasvim je jasno da imamo i $h(A + B) = h(A) + h(B)$, što pokazuje da je h homomorfizam prstena.

   Kako za $I = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ očito imamo $h(I) = I$, vidimo da je h i homo. prstena s jedinicom.

   • **(2 boda)** Primijetimo da je jezgra

$$\ker h = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in R \mid h(A) = \begin{pmatrix} d & -2c/3 \\ -3b/2 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} = \cdots = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

   Zaaključujemo: h jest monomorfizam.

• **(3 boda)** Primijetimo kako naprimjer ne postoji neka matrica $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in R$ t.d. je $h(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Naime, kad bi to bilo posebno bismo imali $-2c/3 = 1 \Leftrightarrow c = -3/2$, što nije cijeli broj. Zaključujemo: h nije epimorfizam.

---

3. *Neka je A skup svih polinoma $f \in \mathbb{Z}[X]$ takvih da su brojevi $f(0)$ i $f(2)$ oba djeljivi s 3. Je li A ideal u $\mathbb{Z}[X]$? Ako da, utvrdite je li A maksimalan ideal i je li A prost ideal.*

Rješenje. • **(1+2 boda)** Neka su $f, g \in A$; tj., imamo $f(0), f(2), g(0), g(2) \in 3\mathbb{Z}$. Ali onda je $(f-g)(0) = f(0) - g(0) \in 3\mathbb{Z}$ i analogno $(f-g)(2) \in 3\mathbb{Z}$. Slijedi: $f - g \in A$.

Za $f \in A$ i $p \in \mathbb{Z}[X]$ je $(fp)(0) = f(0)p(0) \in 3\mathbb{Z}$, jer je $p(0) \in \mathbb{Z}$ i $f(0) \in 3\mathbb{Z}$ (tj., $3\mathbb{Z}$ je ideal u $\mathbb{Z}$). Analogno, $(fp)(2) \in 3\mathbb{Z}$. Slijedi: A je ideal u $\mathbb{Z}[X]$.

• **(3 boda)** Primijetimo kako dana argumentacija pokazuje da je primjerice i $J := \{f \in \mathbb{Z}[X] \mid f(0) \in 3\mathbb{Z}\}$ također ideal u $\mathbb{Z}[X]$. I očito je $A \subseteq J$. Ali npr. je $h(X) = X + 3$ u J, ali nije u A; pa imamo strogu inkluziju $A \subset J$. Jasno, $J \neq \mathbb{Z}[X]$ (npr. polinom konstante 1 nije u J). Zaključujemo: S nije maksimalan ideal.

• **(2 boda)** Gledajmo naprimjer polinome $f(X) := X + 3$ i $g(X) := X + 1$ iz $\mathbb{Z}[X]$. Računamo $(fg)(0) = 3$ i $(fg)(2) = 15$, pa je $fg \in A$. Ali očito $f \notin A$ i $g \notin A$. Zaključujemo da A nije (potpuno) prost ideal.

Napomena. Dani argument da A nije maksimalan je direktan. Može se prvo pokazati da A nije prost i onda, pozivajući se na teorem koji tvrdi da je *svaki maksimalan ideal u prstenu s jedinicom i prost ideal*, zaključiti kako A nije niti maksimalan.

---

4. *Neka je R nekomutativan prsten s jedinicom.*

   (a) *Pretpostavimo da je I maksimalan ideal u R. Je li I nužno prost ideal u R? (Svoju tvrdnju detaljno dokažite.)*

   (b) *Pretpostavimo da je J potpuno prost ideal u R. Je li kvocijentni prsten R/J nužno domena? (Svoju tvrdnju detaljno dokažite.)*

Rješenje. (a) • **(4 bod.)** Detaljno napisan dokaz činjenice (dokazano na predavanjima): *Ako je $I \trianglelefteq R$ maksimalan ideal, onda je on i prost ideal.*

(4) • **(4 bod.)** Sljedeći argument je de facto sasvim isti kao u teoremu s predavanja koji je tvrdio da ako imamo prost ideal P u komutativnom prstenu A s jedinicom onda je A/P integralna domena.

Naime, uzmimo dva elementa $x, y \in R \setminus J$; što znači da su elementi $\overline{x} := x + J \in R/J$ i analogno $\overline{y} \in R/J$ različiti od nul-elementa $\overline{0}$. Tvrdimo da je i $\overline{x}\,\overline{y} \neq \overline{0}$. Naime u suprotnom bismo imali $xy \in J$, iz čega bi jer je J potpuno prost ideal slijedilo ili $x \in J$ ili $y \in J$. No to bi značilo da je ili $\overline{x} = \overline{0}$ ili $\overline{y} = \overline{0}$; kontradikcija.

5. *Definirajmo C kao skup svih kompleksnih brojeva $a + bi$, gdje su a i b cijeli brojevi djeljivi s 5. Postoji li u skupu C barem jedan element ω koji je prost kao element u prstenu Gaussovih cijelih brojeva? Ako da, nađite neki takav.*

Rješenje. • **(8 bod.)** Svaki element $\omega \in C$ je oblika $\omega = 5x + 5yi$, za neke $x, y \in \mathbb{Z}$. Ali kako je $(2+i)(2-i) = 5$, posebno imamo da je

$$\omega = (2+i)\big((2-i)(x+yi)\big).$$

Zatim definirajmo elemente $s := 2 + i$ i $t := (2-i)(x+yi)$. I onda primijetimo da za normu $N : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}$, $N(a+bi) = a^2 + b^2$, imamo

$$N(s) = 5 \qquad \text{i} \qquad N(t) = N(2-i)N(x+yi) = 5N(x+yi) \geq 5.$$

Po dokazanom na vježbama (lema) zaključujemo kako s i t nisu invertibilni elementi; i zato ω nije ireducibilan element. Preostaje primijetiti kako je prsten Gaussovih cijelih brojeva Euklidova domena (dokazano na predavanjima), pa je to i DGI (dokazano na predavanjima). Isto tako smo dokazali da u svakoj DGI su pojmovi ireducibilnog i prostog elementa ekvivalentni. Slijedi da nikoji element iz C nije prost.