

Alg. strukture (nast. smjerovi) – drugi kratki test - rješenja i bodovanje
05. lipnja 2026.

1. Definirajmo S kao skup svih realnih polinoma kojima je zbroj svih polinomijalnih koeficijenata cijeli broj; tj., polinom $f(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n \in \mathbb{R}[X]$ je u S ukoliko je $a_0 + a_1 + \dots + a_n \in \mathbb{Z}$. Je li S potprsten prstena $\mathbb{R}[X]$? Je li S prsten s jedinicom?

Rješenje.

- **(1 bod)** Primijetimo: $S = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid f(1) \in \mathbb{Z}\}$. Sada ako su $f, g \in S$, onda je $f(1), g(1) \in \mathbb{Z}$. I onda imamo

$$(f - g)(1) = f(1) - g(1) \in \mathbb{Z} \quad \text{i} \quad (fg)(1) = f(1)g(1) \in \mathbb{Z}.$$

Zaključujemo: $f - g, fg \in S$; i zato je (po 'kriteriju potprstena') $S \leq \mathbb{R}[X]$, potprsten.

- **(0.5 boda)** Za polinom konstante $j(X) := 1$ je j jedinica prstena $\mathbb{R}[X]$. Ali očito je i $j \in S$ pa je S potprsten s jedinicom od $\mathbb{R}[X]$.

2. Neka je W skup svih 2×2 cjelobrojnih matrica $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ takvih da su brojevi $a + b$ i $c + d$ oba parni. Je li W lijevi ideal u prstenu $M_2(\mathbb{Z})$? Je li W (dvostrani) ideal u prstenu $M_2(\mathbb{Z})$?

Rješenje.

- **(0.5 boda)** Neka su $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in W$ i $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \in W$. Onda su brojevi $a + b, c + d, a_1 + b_1, c_1 + d_1 \in 2\mathbb{Z}$. Ali onda za

$$A - A_1 = \begin{pmatrix} a - a_1 & b - b_1 \\ c - c_1 & d - d_1 \end{pmatrix}$$

imamo da je $(a - a_1) + (b - b_1) = (a + b) - (a_1 + b_1) \in 2\mathbb{Z}$, kao razlika dva parna broja. Analogno je i $(c - c_1) + (d - d_1) \in 2\mathbb{Z}$. Znači: $(W, +) \leq (M_2(\mathbb{Z}), +)$, aditivna podgrupa.

- **(0.5 boda)** Nadalje, za $A \in W$ kao gore i $M = \begin{pmatrix} x & y \\ w & z \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$ imamo

$$MA = \begin{pmatrix} xa + yc & xb + yd \\ wa + zc & wb + zd \end{pmatrix}.$$

Primijetimo:

$$(xa + yc) + (xb + yd) = x(a + b) + y(c + d) \in 2\mathbb{Z};$$

jer $a + b, c + d \in 2\mathbb{Z}$. Slijedi: W je lijevi ideal u $M_2(\mathbb{Z})$.

- **(1 bod)**

Primijetimo da npr. za $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W$ i $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$ je $AM = M \notin W$. Znači: W nije desni ideal u $M_2(\mathbb{Z})$.

3. Definirajmo preslikavanje $\phi : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ s

$$\phi \begin{pmatrix} x & y \\ w & z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} z & -w \\ -y & x \end{pmatrix}.$$

Je li ϕ endomorfizam prstena $M_2(\mathbb{R})$? Je li ϕ automorfizam prstena $M_2(\mathbb{R})$?

Rješenje. • (0.5 boda) Za $A = \begin{pmatrix} x & y \\ w & z \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ iz $M_2(\mathbb{R})$ je

$$\phi(AB) = \phi \begin{pmatrix} xa + yc & xb + yd \\ wa + zc & wb + zd \end{pmatrix} = (\text{po def. } \phi) = \begin{pmatrix} wb + zd & -(wa + zc) \\ -(xb + yd) & xa + yc \end{pmatrix}$$

i isto tako

$$\phi(A)\phi(B) = \begin{pmatrix} z & -w \\ -y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} zd + wb & -zc - wa \\ -yd - xb & yc + xa \end{pmatrix}.$$

Slijedi da je $\phi(AB) = \phi(A)\phi(B)$. Slično (ali jednostavnije) vidimo da je i $\phi(A + B) = \phi(A) + \phi(B)$; pa je znači ϕ endom. prstena $M_2(\mathbb{R})$.

• (0.5 boda) Jezgra: $\ker \phi = \{A = \begin{pmatrix} x & y \\ w & z \end{pmatrix} \mid \phi(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\} = \{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\}$, pa je ϕ mono.

• (0.5 boda) Za proizvoljan $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ definirajmo $A := \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, pa je $\phi(A) = B$. Slijedi da je ϕ i epi. a onda i automorfizam.

Dodatne napomene (uz test).

• Većina studenata bi konačno trebala naučiti što je lijevi ideal u prstenu a što desni ideal. (Pogledati definiciju u pdf-u [AS]!)